

# 具饱和发生率的被修正 HIV 传染病模型的全局稳定性\*

杨俊仙<sup>1</sup>, 王雷宏<sup>2</sup>

(1. 安徽农业大学理学院, 安徽 合肥 230036;  
2. 安徽农业大学林学与园林学院, 安徽 合肥 230036)

**摘要:** 提出了一类具有饱和发生率的被修正 HIV 传染病模型。首先通过分析相应的特征方程, 得到了无病平衡点  $E_0(T_0, 0, 0)$  和正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  的局部渐近稳定性。进一步构造 Lyapunov 函数和利用 LaSalle 不变集原理, 证明了当基本再生数  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点  $E_0(T_0, 0, 0)$  是全局渐近稳定的; 利用第二加性复合矩阵, 证明了当基本再生数  $R_0 > 1$  时, 正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  是全局渐近稳定的。最后通过数值模拟, 验证了所得主要理论结果。

**关键词:** HIV 传染病; 饱和发生率; Lyapunov 函数; LaSalle 不变集原理; 第二加性复合矩阵

**中图分类号:** O175.13    **文献标志码:** A    **文章编号:** 0529-6579 (2018) 03-0064-06

## Global stability of a modified HIV infection model with saturation incidence

YANG Junxian<sup>1</sup>, WANG Leihong<sup>2</sup>

(1. School of Science, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, China;

2. School of Forestry & Landscape Architecture, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, China)

**Abstract:** A modified HIV infection model with saturation incidence is studied. By analyzing the corresponding characteristic equations, the local stability of an infection-free equilibrium  $E_0(T_0, 0, 0)$  and a positive equilibrium  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  is discussed. By using suitable Lyapunov functions and the LaSalle invariant principle, it is proved that if the basic reproductive number  $R_0 < 1$ , the infection-free equilibrium  $E_0(T_0, 0, 0)$  is globally asymptotically stable. If the basic reproductive number  $R_0 > 1$ , by means of the second additive compound matrix, the globally asymptotical stability of the positive equilibrium  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  is obtained. Numerical simulations are carried out to illustrate the main theoretical results.

**Key words:** HIV infection; saturation incidence; Lyapunov function; LaSalle invariant principle; the second additive compound matrix

艾滋病的病原体是人类免疫缺陷病毒 (Human Immunodeficiency Virus, 简称 HIV), 主要感染人体免疫系统细胞  $CD4^+ T$ , 可引起细胞计数大幅度

下降, 导致人体免疫缺陷, 严重影响患者抵御感染的能力<sup>[1]</sup>。

目前, 数学建模已经成为分析和控制传染病传

\* 收稿日期: 2017-06-12

基金项目: 国家自然科学基金 (11201002); 安徽省高校自然科学重点项目 (KJ2017A815)

作者简介: 杨俊仙 (1976 年生), 女; 研究方向: 微分方程、生物数学; E-mail: yangjunxian@ahau.edu.cn

通信作者: 王雷宏 (1977 年生), 男; 研究方向: 植物学、生物数学; E-mail: leihong\_wang@qq.com

播的重要工具。近年来,对艾滋病在数学建模方面的研究已取得很大进展<sup>[2-3]</sup>。对模型的改进是为了更好地分析和解释病情,并预测和控制发病率。最初 HIV/AIDS 模型是由 Nowak 和 Perelson 等<sup>[4-5]</sup>提出的,该模型被广泛应用于艾滋病感染动力学:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = A - d_1 T(t) - \beta T(t)V(t), \\ \dot{I}(t) = \beta T(t)V(t) - d_2 I(t), \\ \dot{V}(t) = kI(t) - d_3 V(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $T(t), I(t), V(t)$  分别表示  $t$  时刻未感染  $CD4^+$  T 细胞个数、已感染  $CD4^+$  T 细胞个数和病毒载量 (HIV)。参数  $A$  表示未感染细胞的固有生成率,  $\beta$  表示病毒感染率,  $d_1, d_2, d_3$  分别表示未感染细胞、已感染细胞和病毒的死亡率,  $k$  表示病毒复制率。  $A, \beta, d_1, d_2, d_3, k$  均为正数。

在 20 世纪 90 年代,有一个关于 HIV RNA 转录成 DNA 的讨论:当 HIV 病毒进入  $CD4^+$  T 细胞后, HIV 病毒可能并未完全反转录成 DNA。在病毒基因组被整合到淋巴细胞基因组之前,一部分处于潜伏期的感染细胞可以恢复到未被感染的状态<sup>[6]</sup>。最近,已有一些数学模型建立在这样假设(部分感染细胞可恢复到未被感染状态)的基础上<sup>[7-8]</sup>。其中 Srivastava 和 Chandra 讨论了如下模型<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = A - d_1 T(t) - \beta T(t)V(t) + pI(t), \\ \dot{I}(t) = \beta T(t)V(t) - d_2 I(t) - pI(t), \\ \dot{V}(t) = kI(t) - d_3 V(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中变量  $T(t), I(t), V(t)$  和参数  $A, \beta, d_1, d_2, d_3, k$  与模型 (1) 具有相同的意义,这里参数  $p(p > 0)$  表示处于潜伏期感染细胞的恢复率。

在模型 (1) 和 (2) 中,感染率  $\beta T(t)V(t)$  被假设为在未感染细胞个数  $T(t)$  和病毒载量  $V(t)$  之间是双线性的。然而,实际发生率可能不是完全双线性的。Sun 等<sup>[9]</sup>提出了如下模型:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = A - d_1 T(t) - \frac{\beta T(t)V(t)}{T(t) + V(t)} + pI(t), \\ \dot{I}(t) = \frac{\beta T(t)V(t)}{T(t) + V(t)} - d_2 I(t) - pI(t), \\ \dot{V}(t) = kI(t) - d_3 V(t) \end{cases} \quad (3)$$

此处用的是非线性发生率  $\frac{\beta T(t)V(t)}{T(t) + V(t)}$ , 即发生率

不再是未感染细胞个数  $T(t)$  和病毒载量  $V(t)$  的双线性关系。

在本文,我们提出了具有饱和发生率  $\frac{\beta T(t)V(t)}{1 + \alpha V(t)}$  的被修正 HIV 传染病模型:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = A - d_1 T(t) - \frac{\beta T(t)V(t)}{1 + \alpha V(t)} + pI(t), \\ \dot{I}(t) = \frac{\beta T(t)V(t)}{1 + \alpha V(t)} - d_2 I(t) - pI(t), \\ \dot{V}(t) = kI(t) - d_3 V(t) \end{cases} \quad (4)$$

假设参数  $\alpha > 0$  且  $d_1 \leq d_2$ 。

由系统 (4) 的前 2 个方程得,

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) + \dot{I}(t) &= \\ A - d_1 T(t) - d_2 I(t) &\leq A - d_1 (T(t) + I(t)) \end{aligned}$$

于是

$$T(t) + I(t) \leq \frac{A}{d_1} \quad (5)$$

再由系统 (4) 的第 3 个方程得

$$\dot{V}(t) = kI(t) - d_3 V(t) \leq \frac{kA}{d_1} - d_3 V(t)$$

于是

$$V(t) \leq \frac{kA}{d_1 d_3} \quad (6)$$

因此系统 (4) 的正向不变集为

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (T(t), I(t), V(t)) \mid 0 \leq \right. \\ &\left. T(t) + I(t) \leq \frac{A}{d_1}, 0 \leq V(t) \leq \frac{kA}{d_1 d_3} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

## 1 平衡点的局部稳定性

系统 (4) 总存在无病平衡点  $E_0(T_0, 0, 0)$ ,

其中  $T_0 = \frac{A}{d_1}$ 。定义基本再生数

$$R_0 = \frac{A\beta k}{d_1(d_2 + p)d_3}$$

易证:当  $R_0 > 1$  时,系统 (4) 存在唯一的正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$ , 其中

$$T^* = \frac{(d_2 + p)d_3(1 + \alpha V^*)}{\beta k}, I^* = \frac{d_3 V^*}{k},$$

$$V^* = \frac{d_1(d_2 + p)}{d_1(d_2 + p)\alpha + \beta d_2}(R_0 - 1)$$

且正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  在  $\Omega$  的内部:

$$\Omega^0 = \left\{ (T, I, V) \in \Omega : T(t) > 0, I(t) > 0, \right.$$

$$V(t) > 0, T(t) + I(t) < \frac{A}{d_1}, V(t) < \frac{kA}{d_1 d_3} \quad (8)$$

因此, 只需要在  $\Omega^0$  上考虑  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  的稳定性。

### 1.1 无病平衡点 $E_0$ 的局部稳定性

**定理 1** 当  $R_0 < 1$  时, 系统 (4) 的无病平衡点  $E_0(T_0, 0, 0)$  是局部渐近稳定的; 当  $R_0 > 1$  时,  $E_0(T_0, 0, 0)$  是不稳定的。

**证明** 系统 (4) 在无病平衡点  $E_0(T_0, 0, 0)$  处的线性化系统的特征方程为

$$(\lambda + d_1) \left[ (\lambda + d_2 + p)(\lambda + d_3) - \frac{A\beta k}{d_1} \right] = 0 \quad (9)$$

显然, 方程 (9) 总有负实根  $\lambda = -d_1$ , 其余的根取决于方程

$$(\lambda + d_2 + p)(\lambda + d_3) - \frac{A\beta k}{d_1} = 0 \quad (10)$$

整理方程 (10) 得

$$\lambda^2 + (d_2 + p + d_3)\lambda + (d_2 + p)d_3 - \frac{A\beta k}{d_1} = 0 \quad (11)$$

当  $R_0 < 1$  时,  $(d_2 + p)d_3 - \frac{A\beta k}{d_1} > 0$ , 方程 (11) 所有的根均有负实部, 因此无病平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的。当  $R_0 > 1$  时,  $(d_2 + p)d_3 - \frac{A\beta k}{d_1} < 0$ , 方程 (11) 有一个正实根, 因此无病平衡点  $E_0$  是不稳定的。

### 1.2 正平衡点 $E^*(T^*, I^*, V^*)$ 的局部渐近稳定性

**定理 2** 当  $R_0 > 1$  时, 系统 (4) 的正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  是局部渐近稳定的。

**证明** 系统 (4) 在正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  的线性化系统的特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

其中

$$a_1 = d_1 + \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*} + d_2 + p + d_3 > 0,$$

$$a_2 = d_1(d_2 + p + d_3) +$$

$$\frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*}(d_2 + d_3) + \frac{\alpha V^*(d_2 + p)d_3}{1 + \alpha V^*} > 0,$$

$$a_3 = \frac{\alpha V^* d_1(d_2 + p)d_3}{1 + \alpha V^*} + \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*} d_2 d_3 > 0,$$

$$a_1 a_2 - a_3 = \left( d_1 + \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*} + d_2 + p + d_3 \right) \cdot$$

$$\left[ d_1(d_2 + p + d_3) + \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*}(d_2 + d_3) +$$

$$\frac{\alpha V^*(d_2 + p)d_3}{1 + \alpha V^*} \right] -$$

$$\frac{\alpha V^* d_1(d_2 + p)d_3}{1 + \alpha V^*} - \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*} d_2 d_3 > 0$$

由 Routh-Hurwitz 判别准则知, 正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  是局部渐近稳定的。

## 2 平衡点的全局稳定性

### 2.1 无病平衡点 $E_0$ 的全局渐近稳定性

**定理 3** 当  $R_0 < 1$  时, 系统 (4) 的无病平衡点  $E_0(T_0, 0, 0)$  在  $\Omega$  内是全局渐近稳定的。

**证明** 令  $(T(t), I(t), V(t))$  是系统 (4) 的任一正解, 定义 Lyapunov 函数:

$$V_1(t) = I(t) + \frac{(d_2 + p)}{k} V(t) \quad (12)$$

计算  $V_1(t)$  沿系统 (4) 的全导数:

$$\dot{V}_1(t) = \frac{\beta T(t)V(t)}{1 + \alpha V(t)} - d_2 I(t) - p I(t) +$$

$$\frac{(d_2 + p)}{k} [k I(t) - d_3 V(t)] =$$

$$\left[ \frac{\beta T(t)}{1 + \alpha V(t)} - \frac{(d_2 + p)d_3}{k} \right] V(t) \leq$$

$$\left[ \frac{A\beta}{d_1} - \frac{(d_2 + p)d_3}{k} \right] V(t) =$$

$$\frac{(d_2 + p)d_3}{k} (R_0 - 1) V(t)$$

当  $R_0 < 1$  时,  $\dot{V}_1(t) \leq 0$ , 当且仅当  $V(t) = 0$  时  $\dot{V}_1(t) = 0$ 。因此, 在  $\Omega$  内  $\dot{V}_1(t) = 0$  的最大正向不变集为

$$M_1 = \{(T, I, V) \in \Omega \mid V(t) = 0\}$$

于是有极限方程:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = A - d_1 T(t) + p I(t), \\ \dot{I}(t) = -(d_2 + p) I(t) \end{cases} \quad (13)$$

定义 Lyapunov 函数:

$$V_2(t) = T(t) - T_0 - T_0 \ln \frac{T(t)}{T_0} + I(t) \quad (14)$$

其中  $T_0 = \frac{A}{d_1}$ 。计算  $V_2(t)$  沿系统 (13) 的全导数:

$$\dot{V}_2(t) = \left( 1 - \frac{T_0}{T(t)} \right) (A - d_1 T(t) +$$

$$p I(t)) - (d_2 + p) I(t) =$$

$$A - d_1 T(t) - \frac{T_0 A}{T(t)} + d_1 T_0 - \frac{T_0 p I(t)}{T(t)} - d_2 I(t) =$$

$$d_1 T_0 \left( 2 - \frac{T(t)}{T_0} - \frac{T_0}{T(t)} \right) - \left( \frac{T_0 p}{T(t)} + d_2 \right) I(t) \leq - \left( \frac{T_0 p}{T(t)} + d_2 \right) I(t)$$

其中  $\frac{T(t)}{T_0} + \frac{T_0}{T(t)} \geq 2$ ，当且仅当  $T(t) = T_0, I(t) = 0$  时， $\dot{V}_2(t) = 0$ ，因此  $\dot{V}_2(t) = 0$  的正向不变集为：

$$M_2 = \{ (T, I, V) \in \Omega \mid T(t) = T_0, I(t) = 0 \}$$

由 LaSalle 不变集原理知， $E_0(T_0, 0, 0)$  是全局渐近稳定的。

### 2.2 正平衡点 $E^*$ 的全局渐近稳定性

设开集  $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ ，对  $\forall x \in \Gamma, x \mapsto f(x) \in \mathbf{R}^n$  是  $C^1$  函数。考虑微分方程

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{15}$$

设  $x(t, x_0)$  代表方程 (15) 满足条件  $x(0) = x_0$  的解。令  $\bar{x}$  是系统 (15) 的一个平衡点，Li 等<sup>[10]</sup>作了下面两个基本假设：

( $H_1$ ) 方程 (15) 在  $\Gamma$  内存在一个紧吸引子集  $K \subset \Gamma$ ；

( $H_2$ ) 方程 (15) 在  $\Gamma$  内有唯一平衡点  $\bar{x} \in \Gamma$ 。

给出了如下结论：

**引理 1**<sup>[10]</sup> 若下列条件成立：

(i) 假设 ( $H_1$ ) 和 ( $H_2$ ) 成立；

(ii) 方程 (15) 满足 Poincare'-Bendixson 性质；

(iii) 对系统 (15) 具有  $p(0) \in D$  的每一个周期解  $x = p(t)$ ，系统 (15) 关于  $p(t)$  的二阶复合矩阵

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}(p(t))z(t) \tag{16}$$

是渐近稳定的，其中  $\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$  是  $f$  的 Jacobian 矩阵  $\frac{\partial f}{\partial x}$  的第二加性复合矩阵；

(iv)  $(-1)^n \det\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})\right) > 0$ 。

则系统 (15) 的唯一平衡点  $\bar{x}$  在  $\Gamma$  内是全局渐近稳定的。

**定理 4** 当  $R_0 > 1$  时，系统 (4) 的正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  在  $\Omega^0$  内是全局渐近稳定的。

**证明** 根据引理，逐条验证四个条件：

(i) 条件 ( $H_1$ ) 等价于系统 (4) 的一致持久性<sup>[11]</sup>。由式 (8) 知， $\Omega^0$  是有界的，所以对于系统 (4) 的一致持久性的充分必要条件等价于平

衡点  $E_0$  是不稳定的<sup>[12]</sup>。定理 1 已证：当  $R_0 > 1$  时， $E_0$  是不稳定的，因此系统 (4) 一致持久的，从而 ( $H_1$ ) 成立。

同时，由于  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  是系统 (4) 在  $\Omega^0$  内的唯一平衡点，因此 ( $H_2$ ) 成立。

(ii) 系统 (4) 的 Jacobian 矩阵为

$$J(T, I, V) =$$

$$\begin{pmatrix} -d_1 - \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} & p & -\frac{\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} \\ \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} & -(d_2 + p) & \frac{\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} \\ 0 & k & -d_3 \end{pmatrix}$$

取  $H = \text{diag}(1, -1, 1)$ ，则

$$HJH =$$

$$\begin{pmatrix} -d_1 - \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} & -p & -\frac{\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} \\ \frac{-\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} & -(d_2 + p) & \frac{-\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} \\ 0 & -k & -d_3 \end{pmatrix}$$

显然， $HJH$  的非对角线元素非正，系统 (4) 满足 Poincare'-Bendixson 性质，因此引理 1 的条件 (ii) 成立。

(iii) 令  $p(t) = (T(t), I(t), V(t))$  是系统 (4) 在  $\Omega^0$  内的任意一个周期解，则系统 (4) 的 Jacobian 矩阵的第二加性复合矩阵为

$$J^{[2]} =$$

$$\begin{pmatrix} -d_1 - \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} - d_2 - p & \frac{\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} & \frac{\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} \\ k & -d_1 - \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} - d_3 & p \\ 0 & \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} & -(d_2 + p + d_3) \end{pmatrix} \tag{17}$$

沿系统 (4) 任一周期解  $(T(t), I(t), V(t))$  的二阶复合系统为

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \left( -d_1 - \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} - d_2 - p \right) \omega_1 + \frac{\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} \omega_2 + \frac{\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} \omega_3, \\ \dot{\omega}_2 = k \omega_1 - \left( d_1 + \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} + d_3 \right) \omega_2 + p \omega_3, \\ \dot{\omega}_3 = \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} \omega_2 - (d_2 + p + d_3) \omega_3 \end{cases} \tag{18}$$

考虑 Lyapunov 函数：

$$V_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3, T(t), I(t), V(t)) = \sup \left\{ |\omega_1|, \frac{I(t)}{V(t)} (|\omega_2| + |\omega_3|) \right\}$$

由一致持久性知，周期解  $p(t) = (T(t), I(t), V(t))$  与边界  $\partial\Omega$  有一定的距离，故存在常数  $\mu >$

0, 使得  $T(t) > \mu, I(t) > \mu, V(t) > \mu$ 。并结合式

(8) 中的  $V < \frac{kA}{d_1 d_3}$  得

$$V_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3, T(t), I(t), V(t)) \geq \sup \left\{ |\omega_1|, \frac{\mu d_1 d_3}{kA} (|\omega_2| + |\omega_3|) \right\} \quad (19)$$

对全部  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbf{R}^3$  及  $(T(t), I(t), V(t))$ , 计算  $V_3$  的右导数。注意到

$$D_+ |\omega_1| \leq \left( -d_1 - \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} - d_2 - p \right) |\omega_1| + \frac{\beta T(t)}{(1 + \alpha V(t))^2} (|\omega_2| + |\omega_3|),$$

$$D_+ |\omega_2| \leq k |\omega_1| - \left( d_1 + \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} + d_3 \right) |\omega_2| + p |\omega_3| \quad (20)$$

$$D_+ |\omega_3| \leq \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} |\omega_2| - (d_2 + p + d_3) |\omega_3|$$

因此

$$D_+ \frac{I(t)}{V(t)} (|\omega_2| + |\omega_3|) = \frac{\dot{I}(t)V(t) - I(t)\dot{V}(t)}{V^2(t)} (|\omega_2| + |\omega_3|) + \frac{I(t)}{V(t)} D_+ (|\omega_2| + |\omega_3|) \leq \frac{I(t)}{V(t)} \left( \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} - \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \right) (|\omega_2| + |\omega_3|) + \frac{I(t)}{V(t)} [k |\omega_1| - (d_1 + d_3) |\omega_2| - (d_2 + d_3) |\omega_3|] \leq \frac{I(t)}{V(t)} k |\omega_1| + \left( \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} - \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} - d_1 - d_3 \right) \cdot \frac{I(t)}{V(t)} (|\omega_2| + |\omega_3|) \quad (21)$$

其中, 利用了条件  $d_1 \leq d_2$ 。由式 (20) - (21) 可得

$$D_+ V_3(t) \leq \sup \{g_1(t), g_2(t)\} V_3(t) \quad (22)$$

这里

$$g_1(t) = -d_1 - \frac{\beta V(t)}{1 + \alpha V(t)} - d_2 - p + \frac{\beta T(t)V(t)}{I(t)(1 + \alpha V(t))^2} \leq -d_1 - d_2 - p + \frac{\beta T(t)V(t)}{I(t)(1 + \alpha V(t))},$$

$$g_2(t) = \frac{kI(t)}{V(t)} + \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} - \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} - d_1 - d_3 \quad (23)$$

把系统 (4) 改写为

$$\frac{\beta T(t)V(t)}{I(t)(1 + \alpha V(t))} = \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} + d_2 + p,$$

$$\frac{kI(t)}{V(t)} = \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} + d_3 \quad (24)$$

由式 (23) - (24) 得

$$\sup \{g_1(t), g_2(t)\} \leq \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} - d_1 \quad (25)$$

于是由式 (22), 式 (25) 和 Gronwall 不等式得

$$V_3(t) \leq \frac{V_3(0)}{I(0)} I(t) e^{-d_1 t} \leq \frac{V_3(0)}{I(0)} \frac{A}{d_1} e^{-d_1 t} \quad (26)$$

由上式知  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V_3(t) = 0$ 。故由式 (19) 知, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow 0$ , 即二阶复合系统 (18) 是渐近稳定的。这样就验证了引理 1 中的条件 (iii)。

(iv) 由式 (13) 可得,

$$\det(J(E^*)) = \begin{vmatrix} -d_1 - \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*} & p & -\frac{\beta T^*}{(1 + \alpha V^*)^2} \\ \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*} & -(d_2 + p) & \frac{\beta T^*}{(1 + \alpha V^*)^2} \\ 0 & k & -d_3 \end{vmatrix} = -\left(d_1 + \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*}\right)(d_2 + p)d_3 - \frac{k\beta^2 T^* V^*}{(1 + \alpha V^*)^3} + \frac{d_3 p \beta V^*}{1 + \alpha V^*} + \frac{k\beta T^*}{(1 + \alpha V^*)^2} \left(d_1 + \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*}\right) = -d_1(d_2 + p)d_3 - \frac{\beta V^*}{1 + \alpha V^*}(d_2 + p)d_3 + \frac{d_3 p \beta V^*}{1 + \alpha V^*} + \frac{d_1 k \beta T^*}{(1 + \alpha V^*)^2} = d_1 \left[ \frac{k\beta T^*}{(1 + \alpha V^*)^2} - (d_2 + p)d_3 \right] - \frac{d_2 d_3 \beta V^*}{1 + \alpha V^*} < 0$$

由于  $J(E^*)$  是  $3 \times 3$  矩阵, 即  $n = 3$ , 于是

$$(-1)^3 |J(E^*)| = -|J(E^*)| > 0$$

验证了引理 1 的条件 (iv)。

因此, 当  $R_0 > 1$  时, 由引理得, 系统 (4) 唯一的正平衡点  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  在  $\Omega^0$  内是全局渐近稳定的。

### 3 数值模拟

在系统 (4) 中, 令参数  $A = 5, k = 10, \beta = 0.0002, \alpha = 0.5, p = 0.5, d_1 = 0.1, d_2 = 0.5, d_3 = 0.3$ , 显然  $R_0 = \frac{1}{3} < 1$ , 此时系统存在一个无病平衡点  $E_0(50, 0, 0)$ 。由定理 3 可知,  $E_0$  是全局渐近稳定的, 数值模拟结果验证了上述结论 (见图 1)。

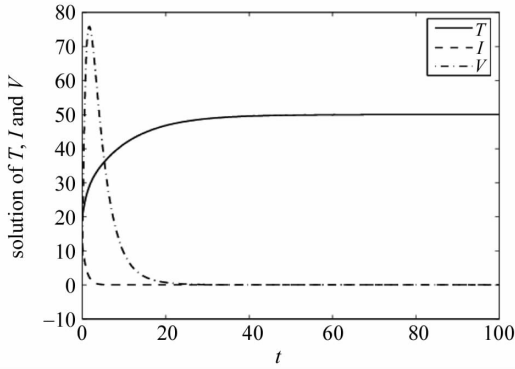


图 1  $R_0 < 1$  时,  $E_0(T_0, 0, 0)$  的稳定性

Fig. 1 When  $R_0 < 1$ , the stability of  $E_0(T_0, 0, 0)$

若令参数  $A = 5, k = 10, \beta = 0.02, \alpha = 0.5, p = 0.5, d_1 = 0.1, d_2 = 0.5, d_3 = 0.3$  时,  $R_0 = \frac{100}{3} > 1$ , 此时系统 (4) 有唯一的正平衡点  $E^*(41.92, 1.62, 53.89)$ 。根据定理 4 可知,  $E^*$  是全局渐近稳定的, 数值模拟的结果与文中结论一致 (见图 2)。

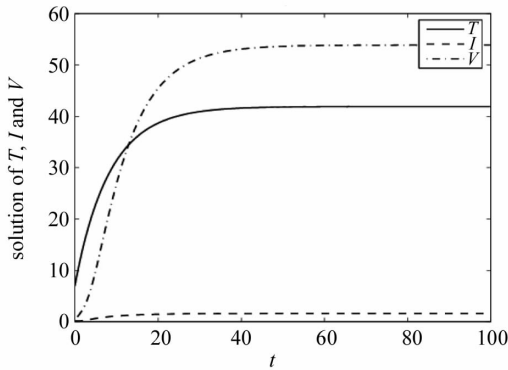


图 2  $R_0 > 1$  时,  $E^*(T^*, I^*, V^*)$  的稳定性

Fig. 2 When  $R_0 > 1$ , the stability of  $E^*(T^*, I^*, V^*)$

参考文献:

[1] WANG L C, LI M Y. Mathematical analysis of the global dynamics of a model for HIV infection of CD4 + T cells [J]. *Mathematical Biosciences*, 2006, 200 (1): 44 - 57.  
 [2] 杨俊仙, 吴元翠, 闫萍. 一类具时滞与饱和和发生率的 HIV-1 传染病模型的全局稳定性[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2016, 55(4): 26 - 29, 38.

YANG J X, WU Y C, YAN P. Global stability of a HIV-1 epidemic model with time delay and saturation incidence rate [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2016, 55(4): 26 - 29, 38.  
 [3] 冯依虎, 陈贤峰, 莫嘉琪. 一类免疫缺陷病毒传播的非线性动力学系统[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2017, 56(5): 60 - 63.  
 FENG Y H, CHEN X F, MO J Q. A class of nonlinear dynamic system of human groups for HIV transmission [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2017, 56(5): 60 - 63.  
 [4] NOWAK M A, BANGHAM C R M. Population dynamics of immune responses to persistent viruses [J]. *Science*, 1996, 272(5258): 74 - 79.  
 [5] PERELSON A S, NELSON P W. Mathematical models of HIV dynamics in vivo [J]. *SIAM Review*, 1999, 41(1): 3 - 44.  
 [6] ESSUNGER P, PERELSON A S. Modeling HIV infection of CD4 + T cell subpopulations [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1994, 170(4): 367 - 391.  
 [7] SRIVASTAVA P K, CHANDRA P. Modeling the dynamics of HIV and CD4 + T cells during primary infection [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(2): 612 - 618.  
 [8] BUONOMO B, VARGAS-DE-LEON C. Global stability for an HIV-1 infection model including an eclipse stage of infected cells [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 385(2): 709 - 720.  
 [9] SUN Q L, MIN L Q. Dynamics analysis and simulation of a modified HIV infection model with a saturated infection rate [J]. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2014, 2014(5258): 145162.  
 [10] MICHAEL Y L, WANG L C. Global stability in some SEIR epidemic models [J]. *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: Models, Methods, and Theory*, 2002, 126: 295 - 311.  
 [11] WALTMAN P. A brief survey of persistence [C] // *Proceedings of a Conference in Honor of Kenneth Cooke*, 1991: 31 - 40.  
 [12] LI M Y, GRAEF J R, WANG L, et al. Global dynamics of a SEIR model with varying total population size [J]. *Mathematical Biosciences*, 1999, 160(2): 191 - 213.